# Capítulo 4

## Utilidad

# Recordando las preferencias

- **x $\succ$ y: x es extríctamente preferida a y.**
- **x $\sim$ y: x e y son igualmente preferidas.**
- **x $\succsim$ y: x es preferida al menos tanto como y.**

- **Completas**: para cualquier par de canastas x e y siempre es posible determinar que

  $$x \succsim y$$

  ó

- $$y \succsim x.$$

- **Reflexivas**: cualquier canasta x es siempre al menos tan preferida como ella misma.

$$x \succsim x.$$

- **Transitivas**: si
  x es al menos tan preferida como y, y
  y es al menos tan preferida como z,
  entonces
  x es al menos tan preferida como z.

$$x \succsim y \text{ e } y \succsim z \Rightarrow x \succsim z.$$

# Funciones de Utilidad

- Una relación de preferencia que es completa, reflexiva, transitiva y contínua **puede ser representada por una función de utilidad contínua**.
- Continuidad significa que cambios pequeños en la canasta de consumo provocan cambios pequeños en el nivel de preferencia..

- Una función de utilidad U(x) **representa** a una relación de preferencias $\succsim$ si y sólo si:

$$x' \succ x'' \iff U(x') > U(x'')$$

$$x' \prec x'' \iff U(x') < U(x'')$$

$$x' \sim x'' \iff U(x') = U(x'').$$

- **La utilidad es un concepto ordinal.**
- ***Por ejemplo, si*** **U(x) = 6 y U(y) = 2 entonces la canasta x es estríctamente preferida a la canasta y. Pero x no es tres veces preferida a y.**

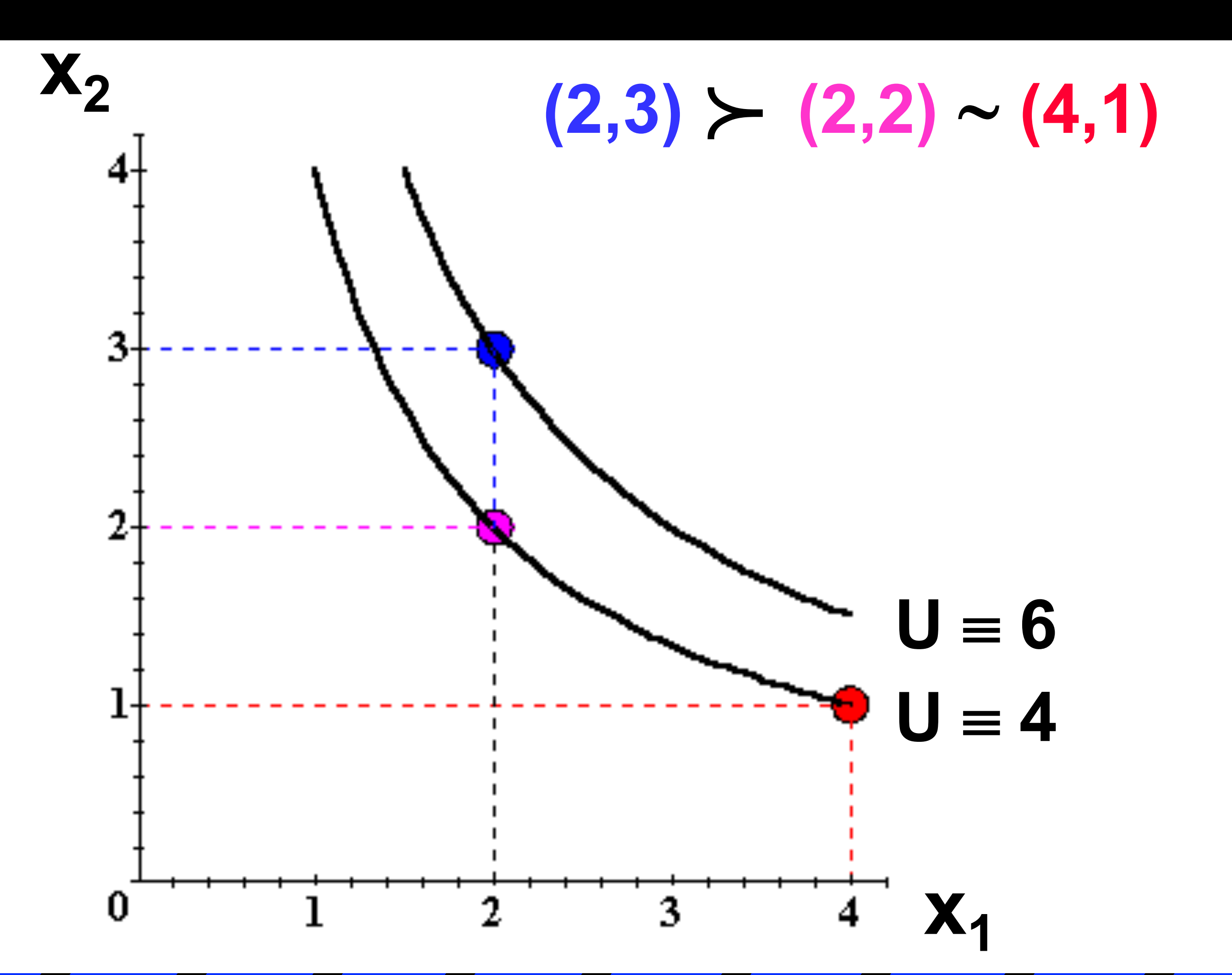
# Funciones de Utilidad y Curvas de Indiferencia

- **Consideremos las canastas (4,1), (2,3) y (2,2).**
- **Supongamos que (2,3) $\succ$ (4,1) ~ (2,2).**
- **Asignemos a estas canastas números cualquiera que preserven el orden de preferencias:**
  ***por ejemplo:***
  **U(2,3) = 6 > U(4,1) = U(2,2) = 4.**
- **A etos números los denominamos niveles de utilidad.**

- Una curva de indiferencia contiene canastas igualmente preferidas.
- Igualmente preferida $\Rightarrow$ el mismo nivel de utilidad.
- En consecuencia, todas las canastas en una curva de indiferencia tienen el mismo nivel de utilidad.

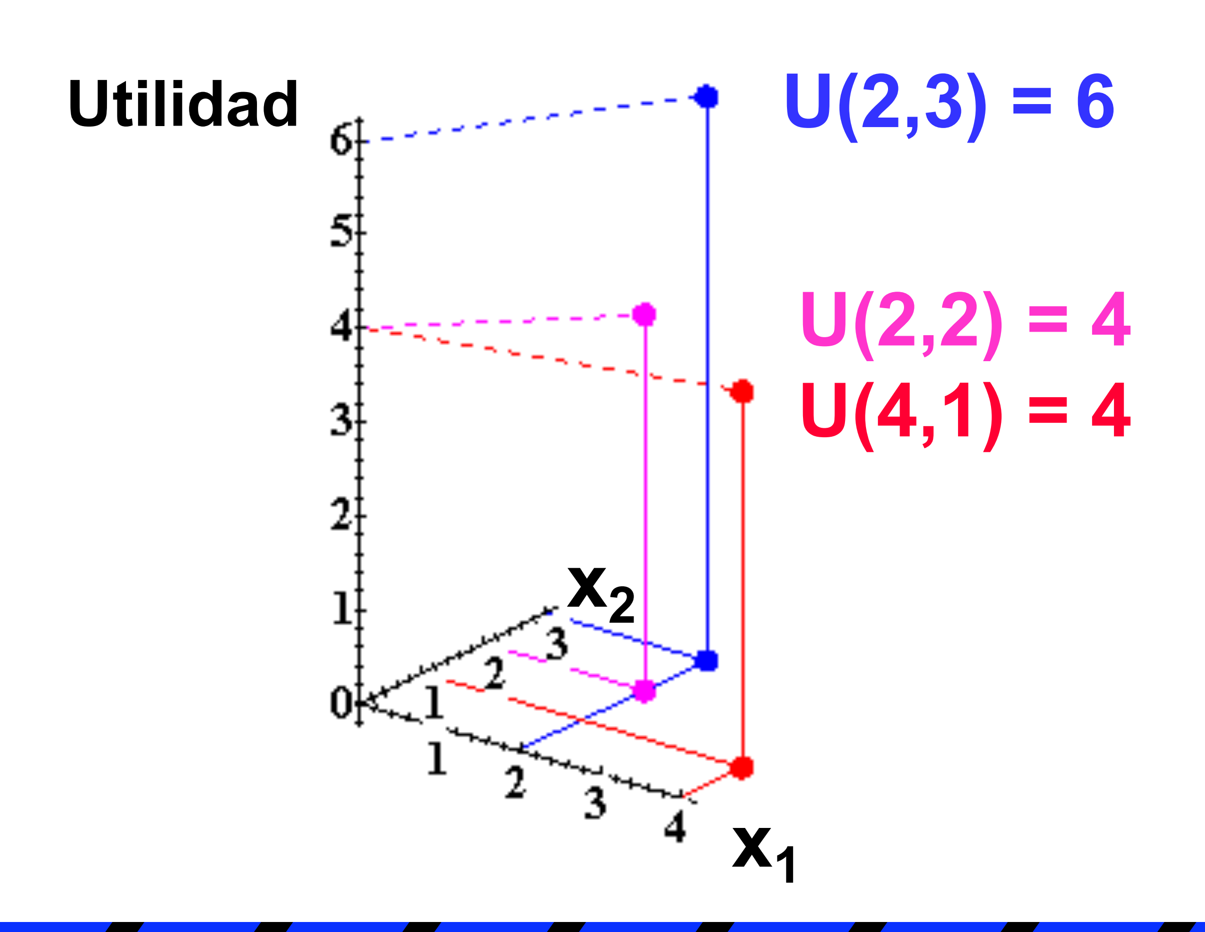
- Así, las canastas (4,1) y (2,2) están en la curva de indiferencia con un nivel de utilidad $U \equiv 4$
- Pero la canasta (2,3) está en la curva de indiferencia con un nivel de utilidad $U \equiv 6$.
- Sobre un grafico, estas curvas de indiferencia se presentan así:

[redacted]

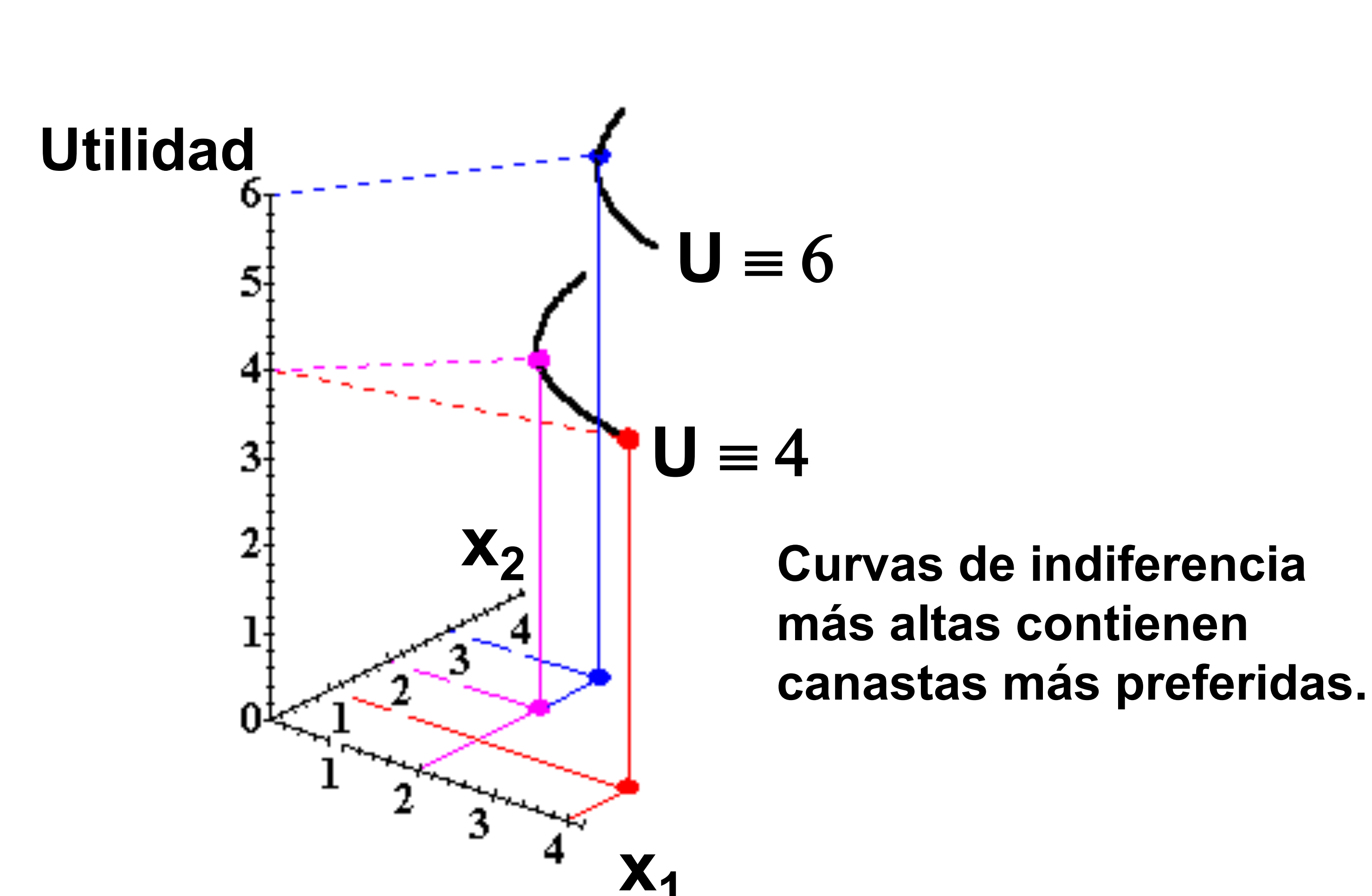


- Otra forma de visualizar la misma información es graficando el nivel de utilidad sobre el eje vertical.

# Grafico en 3D de niveles de consumo y utilidad de tres canastas

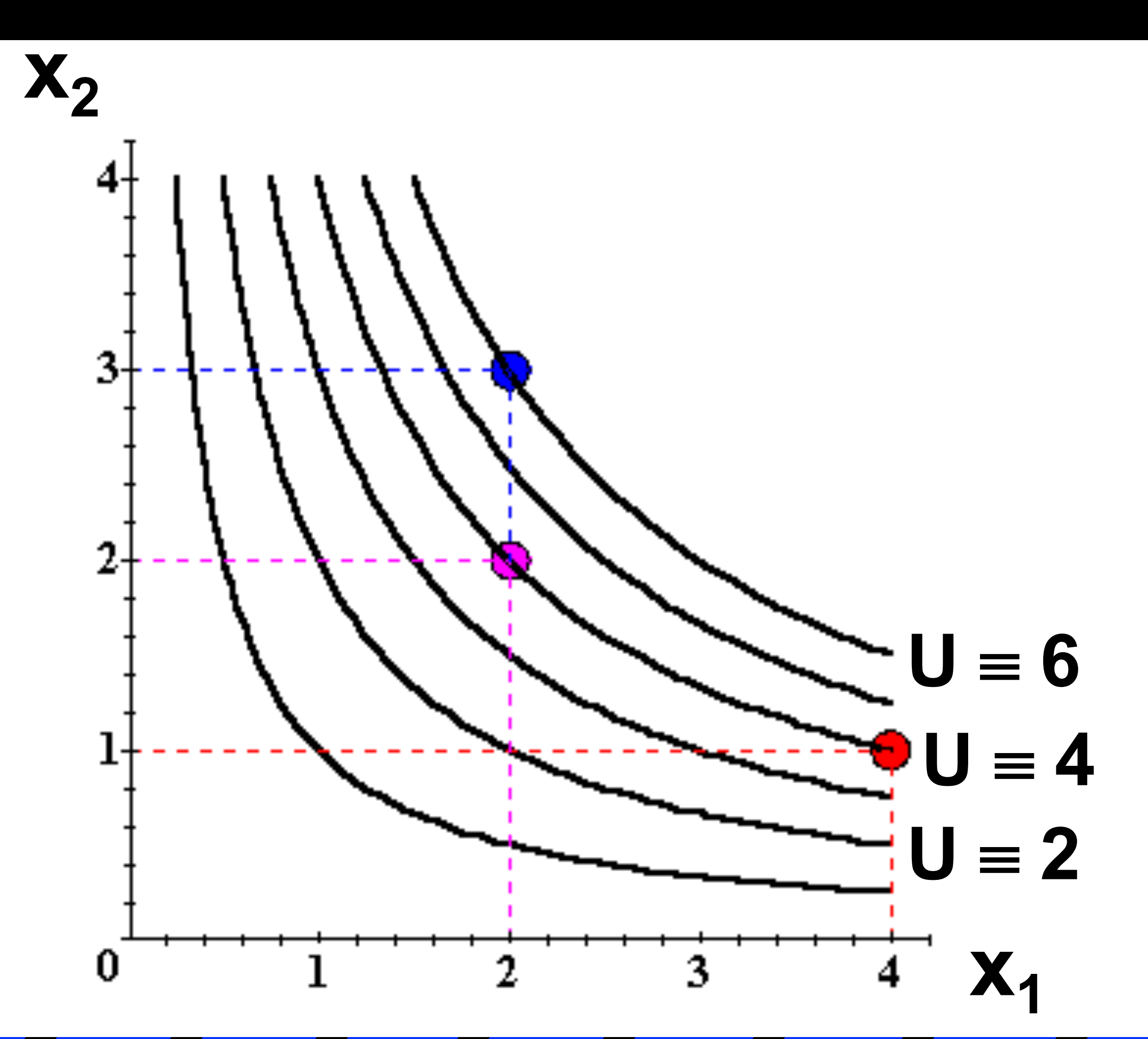


- Esta visualización en 3D de las preferencias nos puede brindar mayor información si incorporamos las curvas de indiferencia.



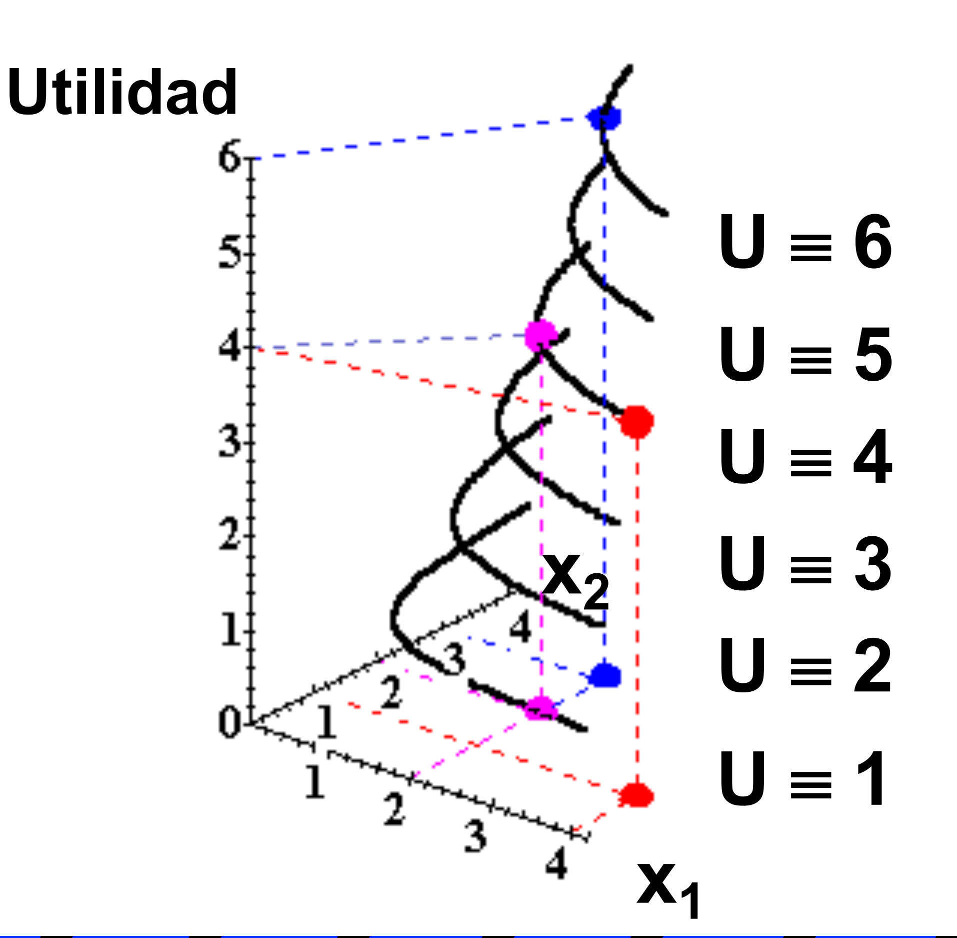

**Curvas de indiferencia más altas contienen canastas más preferidas.**

- Comparando más canastas se constituye una colección mayor de curvas de indiferencia y una mejor descripción de las preferencias del consumidor.

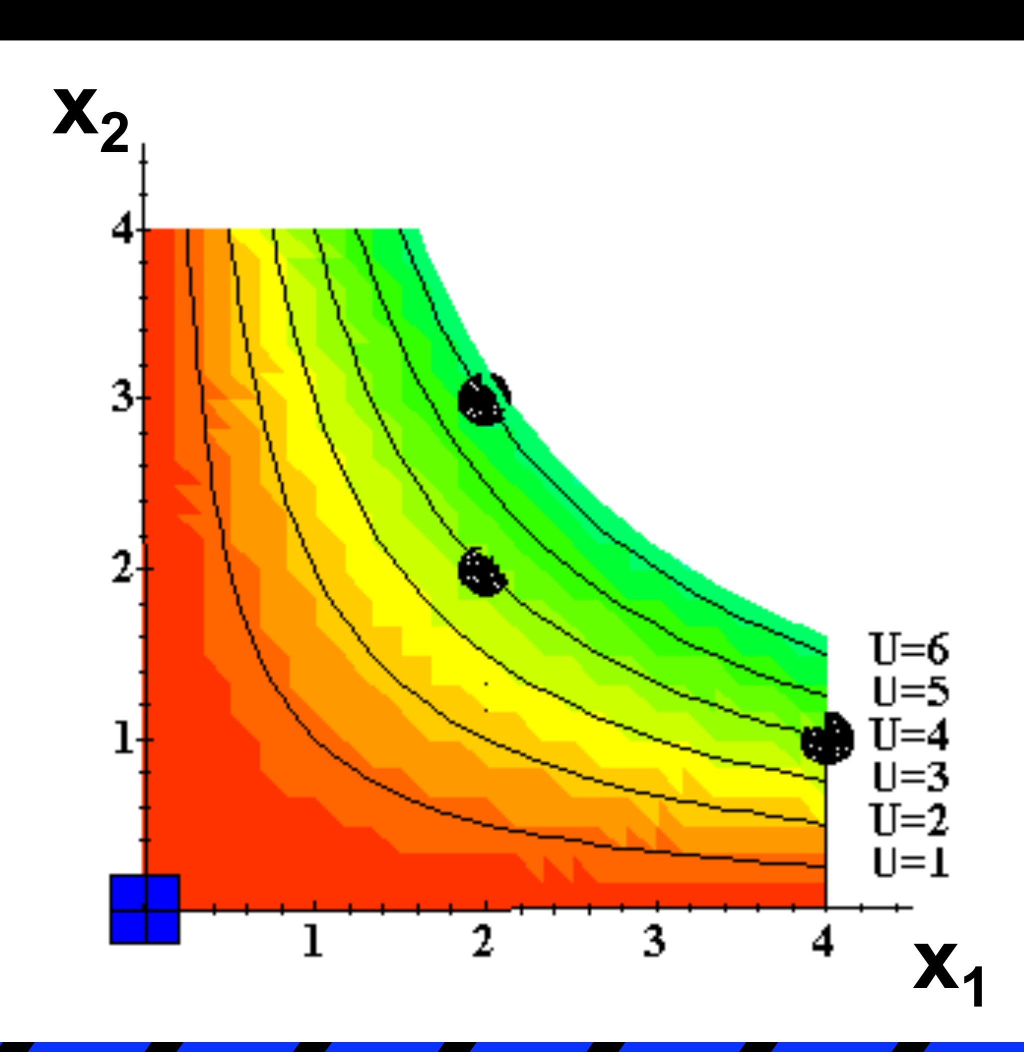


x2
x1
0
1
2
3
4
U ≡ 6
U ≡ 4
U ≡ 2

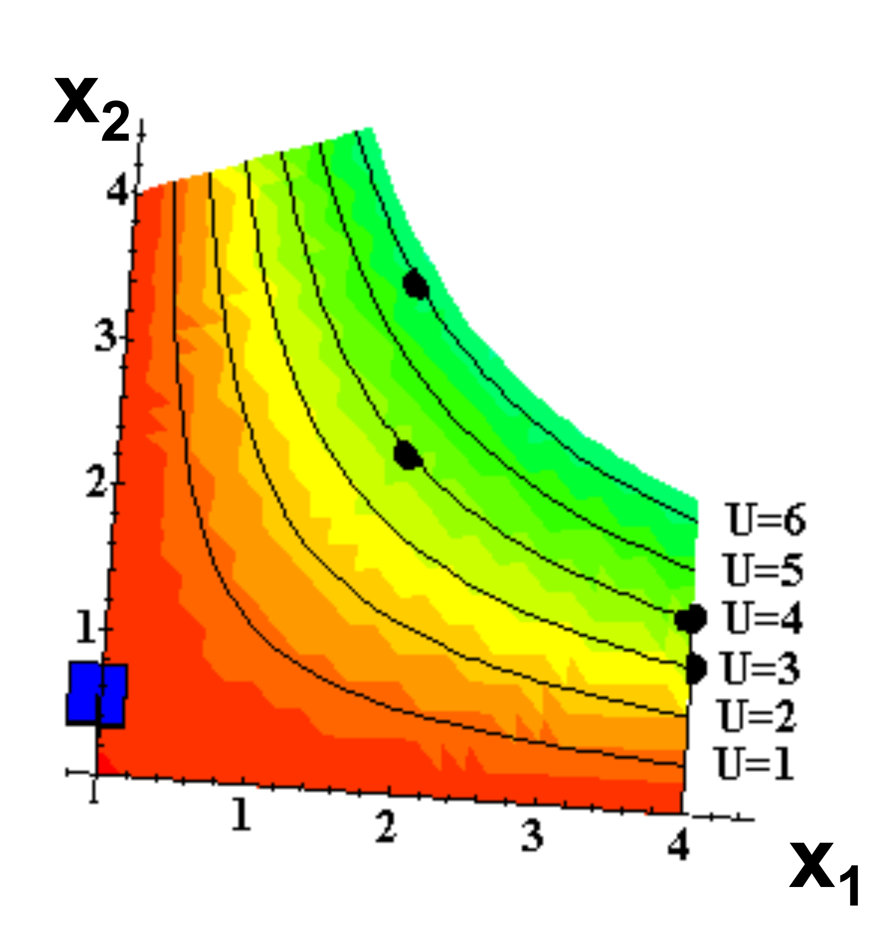
- Como antes, estas pueden ser visualizadas en 3D graficando cada una de las curvas a una altura correspondiente a su nivel de utilidad.


Utilidad
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
1
2
3
4
$x_2$
$x_1$
U ≡ 6
U ≡ 5
U ≡ 4
U ≡ 3
U ≡ 2
U ≡ 1

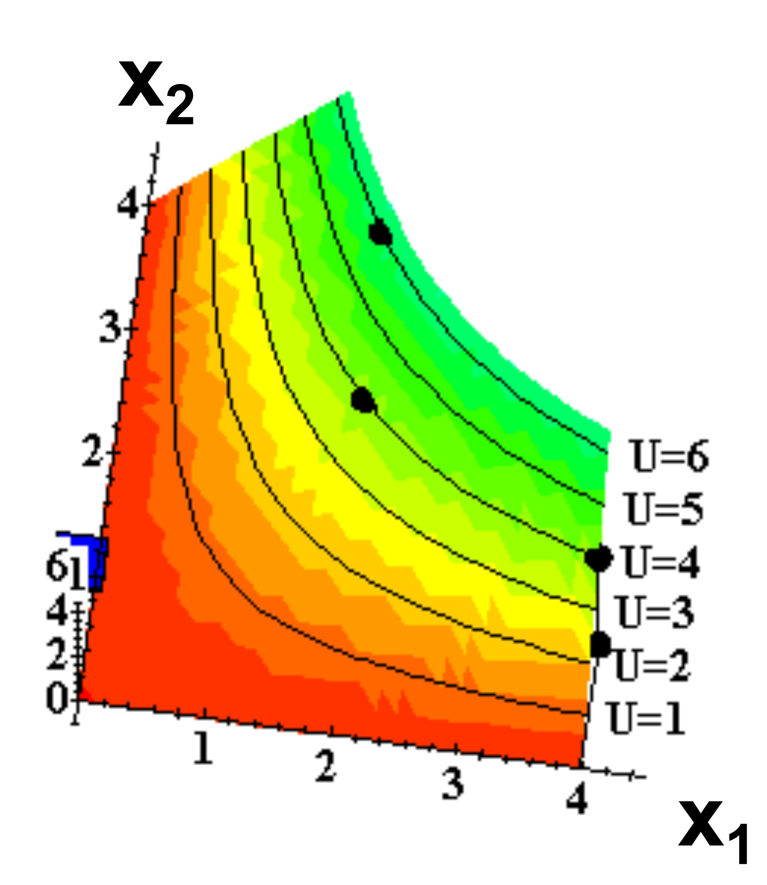
- La comparación de todas las canastas de consumo posibles nos entrega una completa colección de curvas de indiferencia, a cada una de las cuales se les asigna un nivel de utilidad.
- Esta conjunto de curvas de indiferencia representa las preferencias del consumidor.



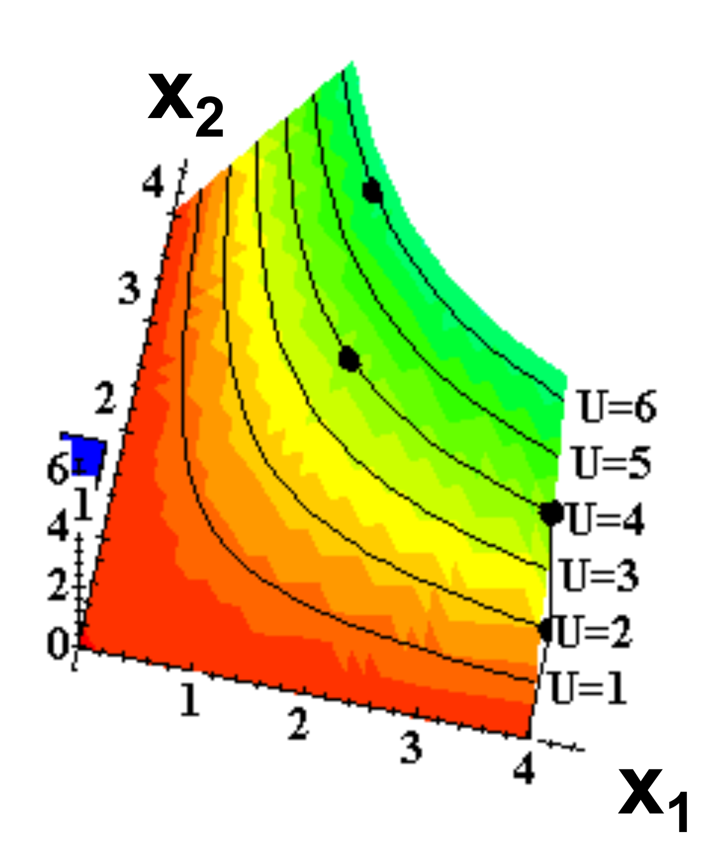
x2
4
3
2
1
1
2
3
4
x1
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1



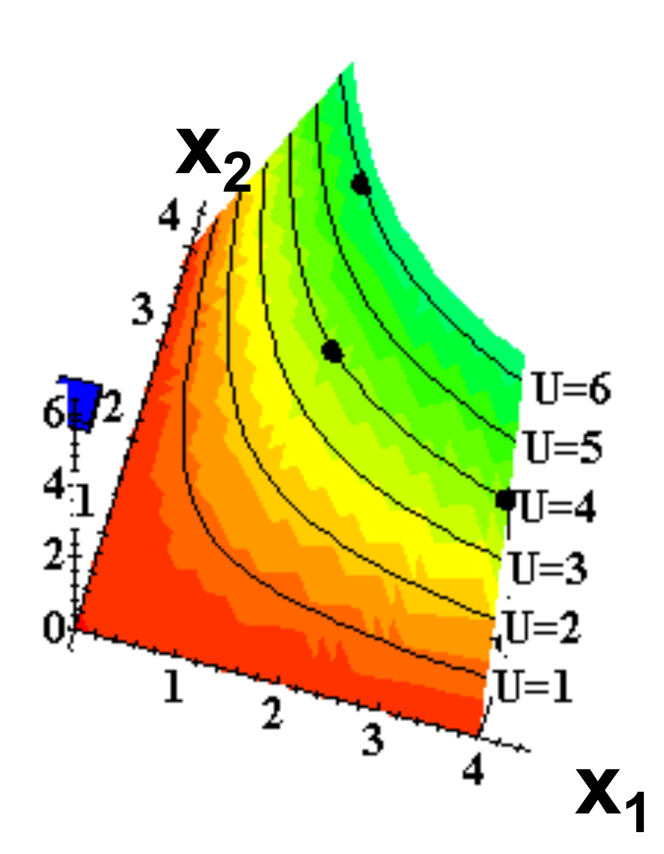
x2
4
3
2
1
1
2
3
4
x1
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1



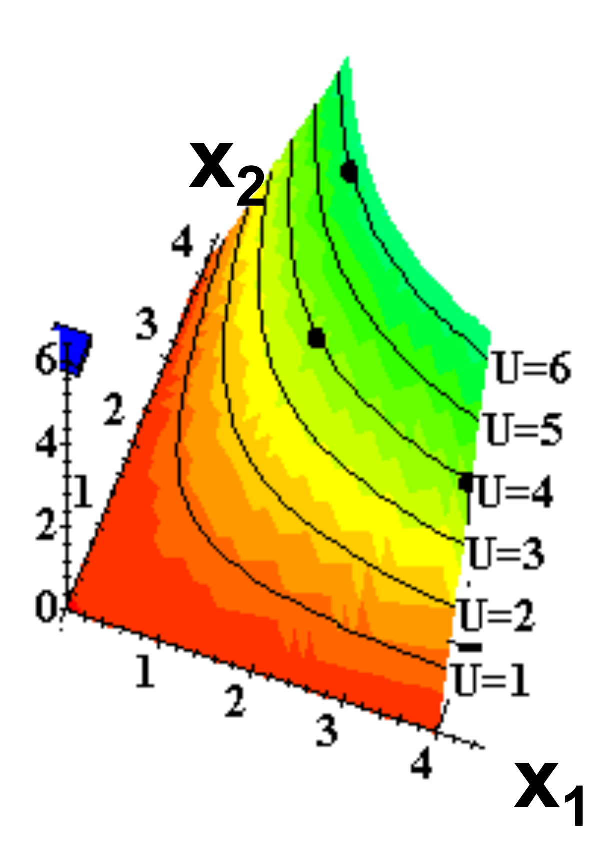
x2
4
3
2
6
1
4
2
0
1
2
3
4
x1
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1

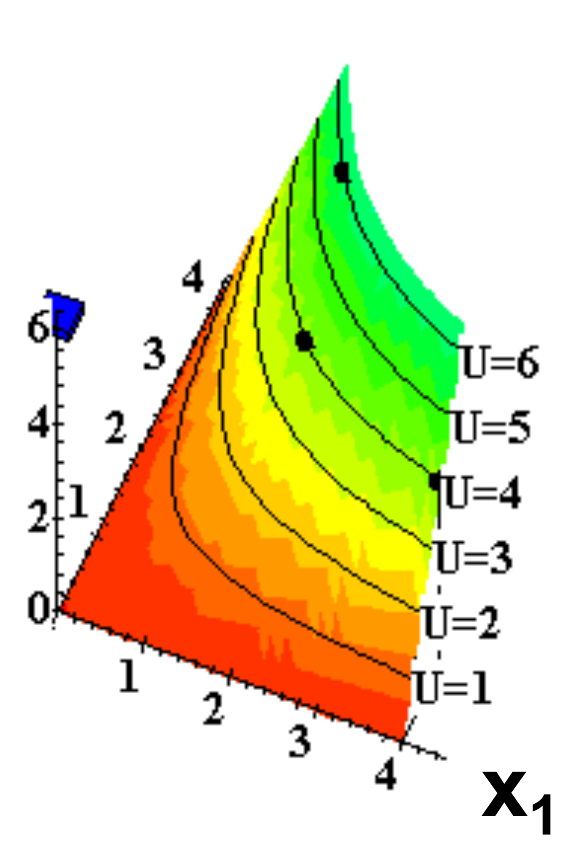


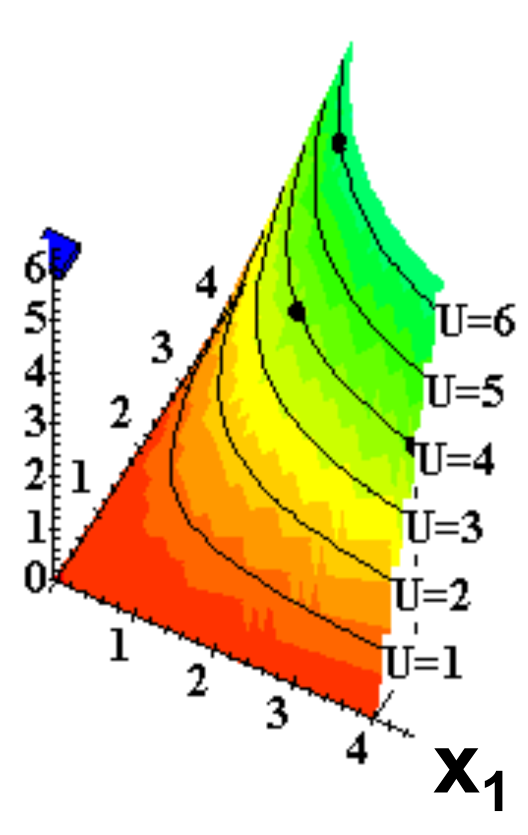
x2
x1
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
0
1
2
3
4

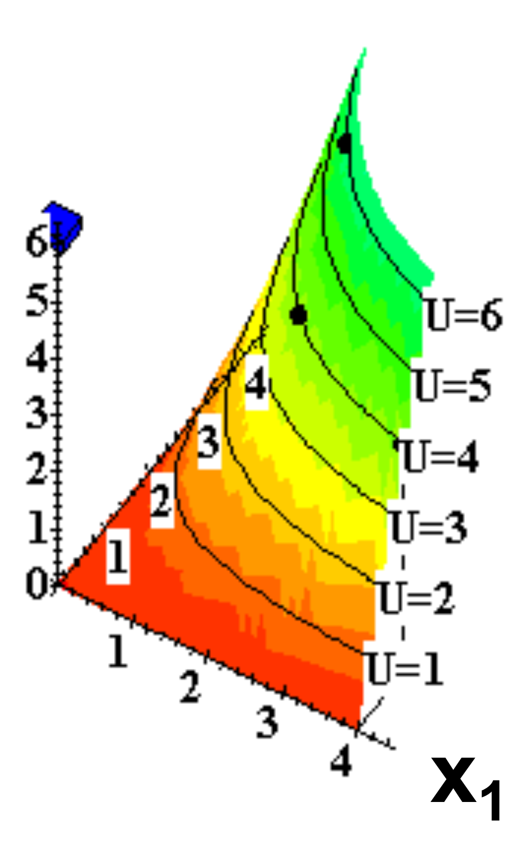


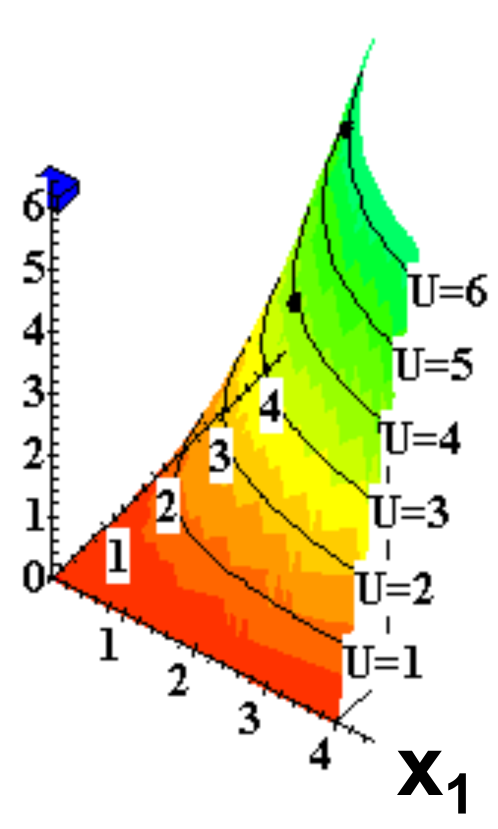
x2
x1
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
0
1
2
3
4


x2
x1
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
0
2
4
6
1
2
3
4
1
2
3
4

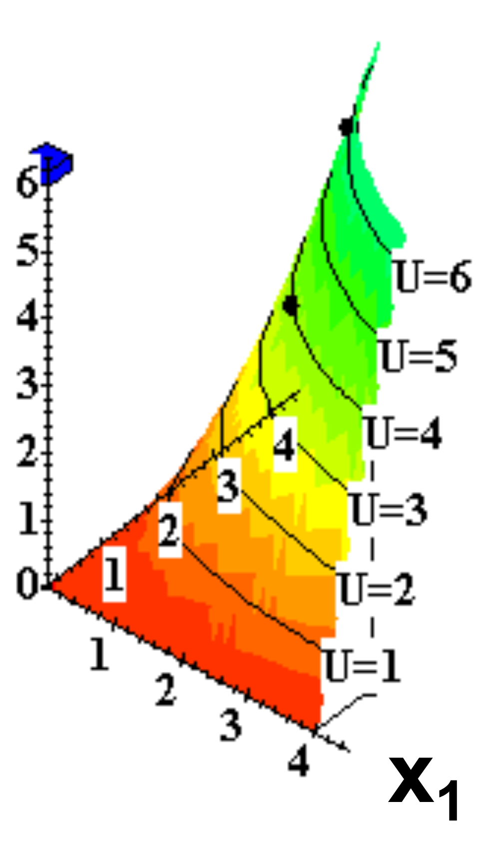

U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
0
2
4
6
1
2
3
4
1
2
3
4
x1

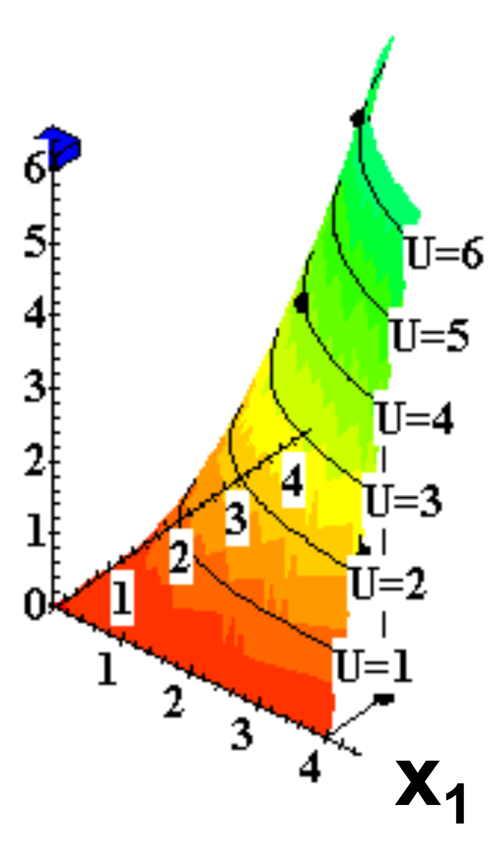

U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
$x_1$
0
1
2
3
4
5
6


U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
0
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
1
2
3
4
$x_1$

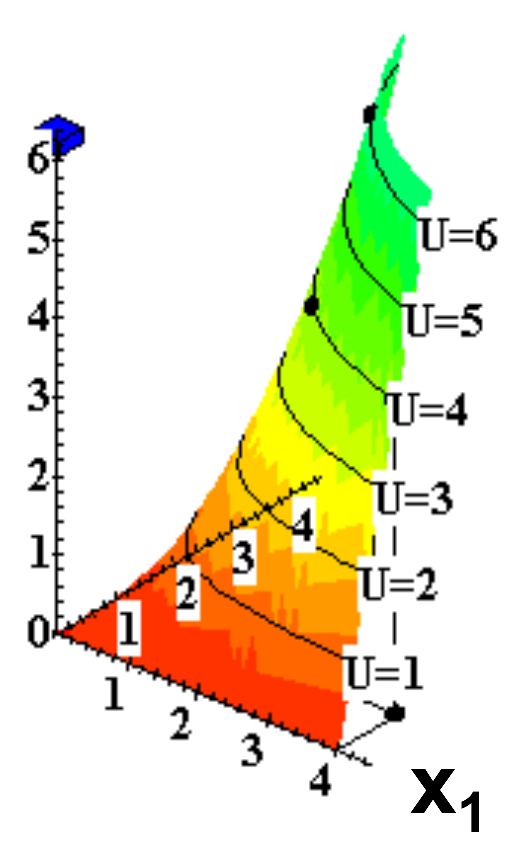


0
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
U=1
U=2
U=3
U=4
U=5
U=6
1
2
3
4
x1

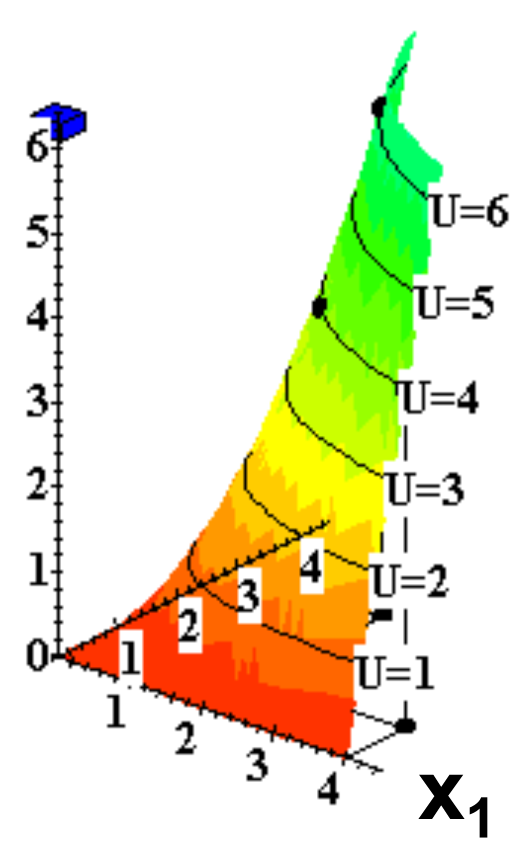

U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
0
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
1
2
3
4
$x_1$



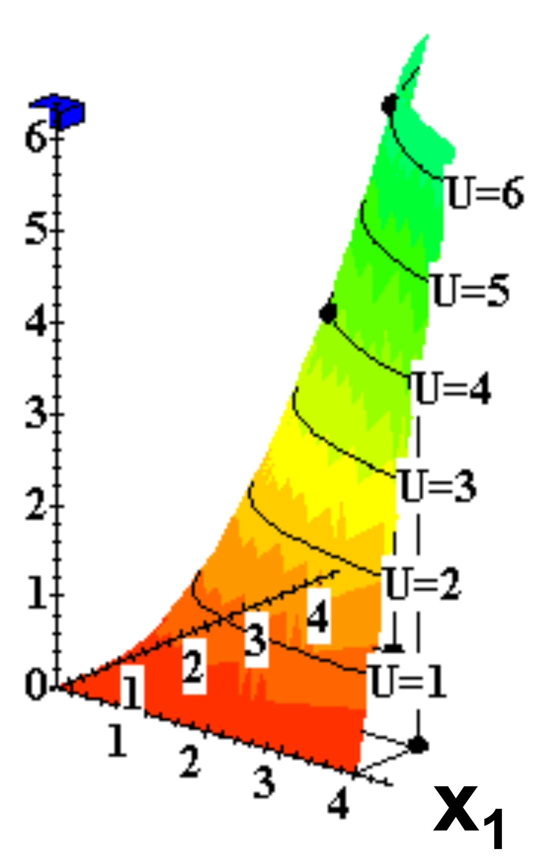
0
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
U=1
U=2
U=3
U=4
U=5
U=6
1
2
3
4
x1



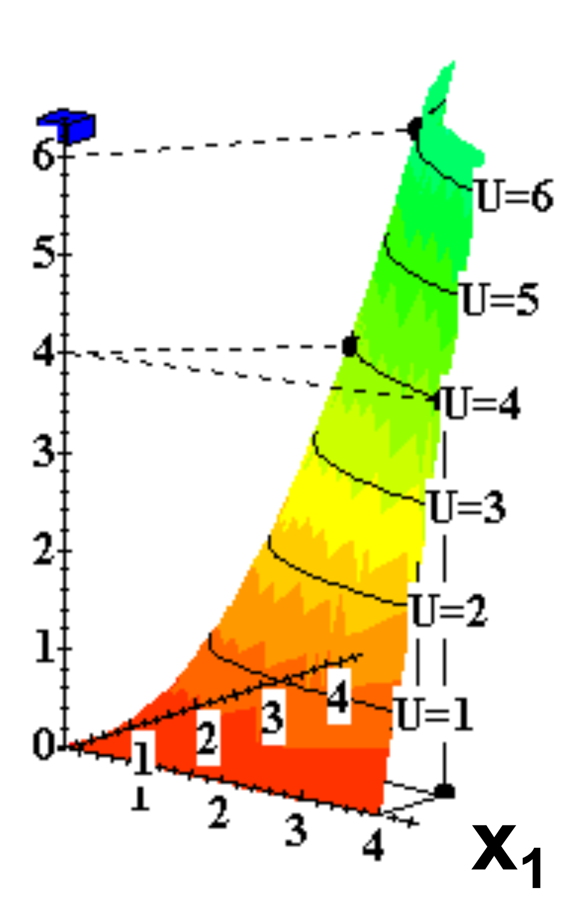
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
1
2
3
4
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
$x_1$



6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
$x_1$



6
5
4
3
2
1
0
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
1
2
3
4
1
2
3
4
x1



6
5
4
3
2
1
0
U=6
U=5
U=4
U=3
U=2
U=1
1
2
3
4
1
2
3
4
$x_1$




STOP

- **El conjunto de todas las curvas de indiferencia para una relación de preferencia dada, es un mapa de indiferencia.**
- **Un mapa de indiferencia es equivalente a la función de utilidad.**

# Funciones de Utilidad

- No hay una función de utilidad única que represente a una relación de preferencias.
- Supongamos que $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ representa una cierta relación de preferencia.
- Ahora volvamos a considerar las canastas (4,1), (2,3) y (2,2).

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$, entonces

  $U(2,3) = 6 > U(4,1) = U(2,2) = 4$;

  es decir, $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ ⟹ $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.
- Definamos $V = U^2$.

- Entonces $V(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$ y
  $V(2,3) = 36 > V(4,1) = V(2,2) = 16$
  en consecuencia
  $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.
- V representa los mismos órdenes de utilidad que U y entonces representa las mismas preferencias.

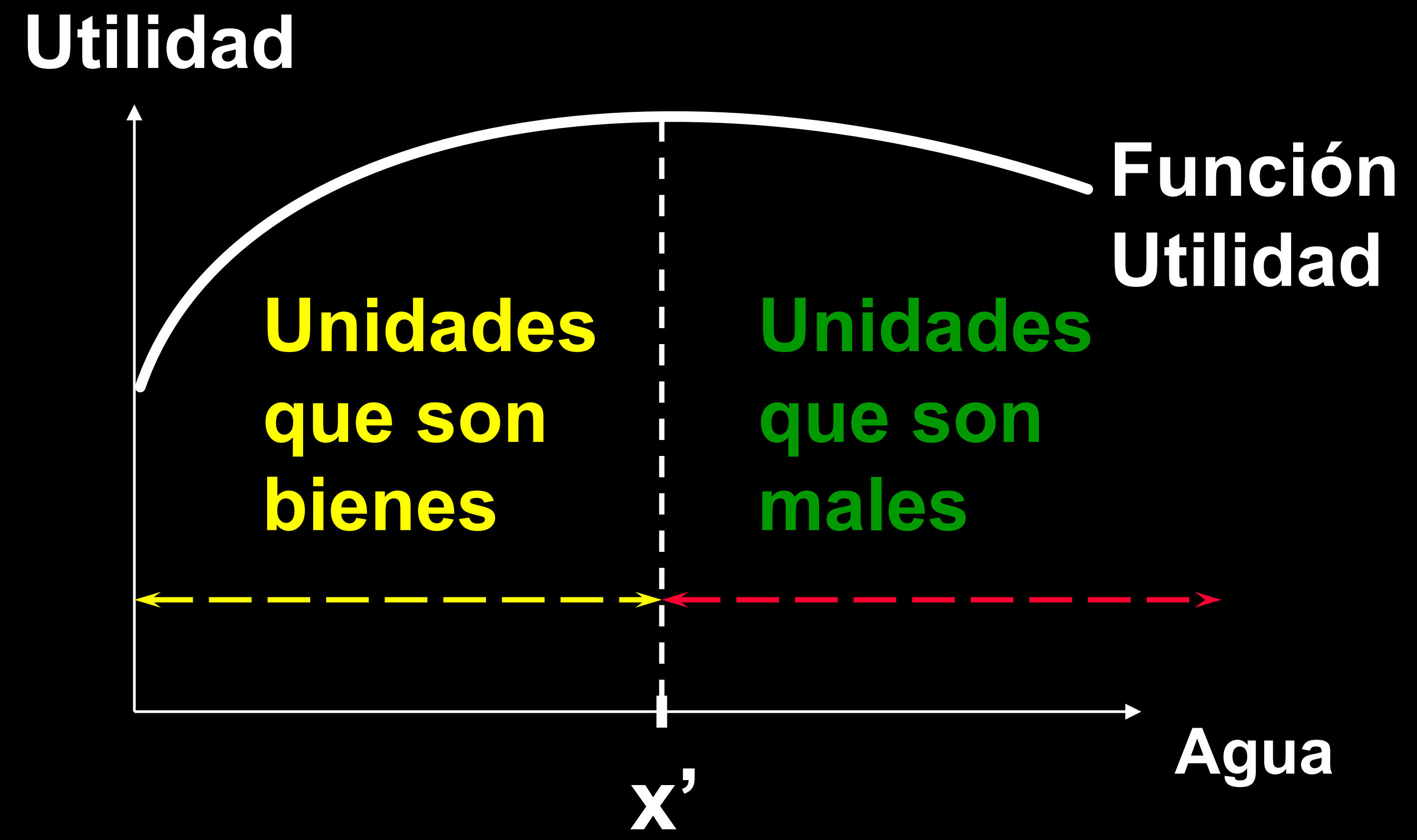
- $U(x_1,x_2) = x_1x_2 \Rightarrow (2,3) \succ (4,1) \sim (2,2).$
- Definamos $W = 2U + 10.$

- Entonces $W(x_1,x_2) = 2x_1x_2+10$ y entonces $W(2,3) = 22 > W(4,1) = W(2,2) = 18$.
  Y de nuevo,
  $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.
- W representa el mismo órden de preferencias de U y de V y entonces $\succ$ representa las mismas preferencias.

- Si
  - U es una función de utilidad que representa a una relación de preferencias y
  - f es una función estríctamente creciente,
- Entonces $V = f(U)$ es también una función de utilidad representativa de la misma relación de preferencias.

# Bienes, Males, Neutros

- Un bien es bien cuando una unidad adicional incrementa la utilidad (nos dá una canasta más preferida).
- Un mal es un bien cuando una unidad adicional disminuye la utilidad (nos dá una canasta menos preferida).
- Un bien neutro es un bien cuando una unidad adicional no cambia la utilidad (nos dá una canasta igualmente preferida).




Alrededor de x’ unidades, una cantidad adicional de agua es un bien neutro.

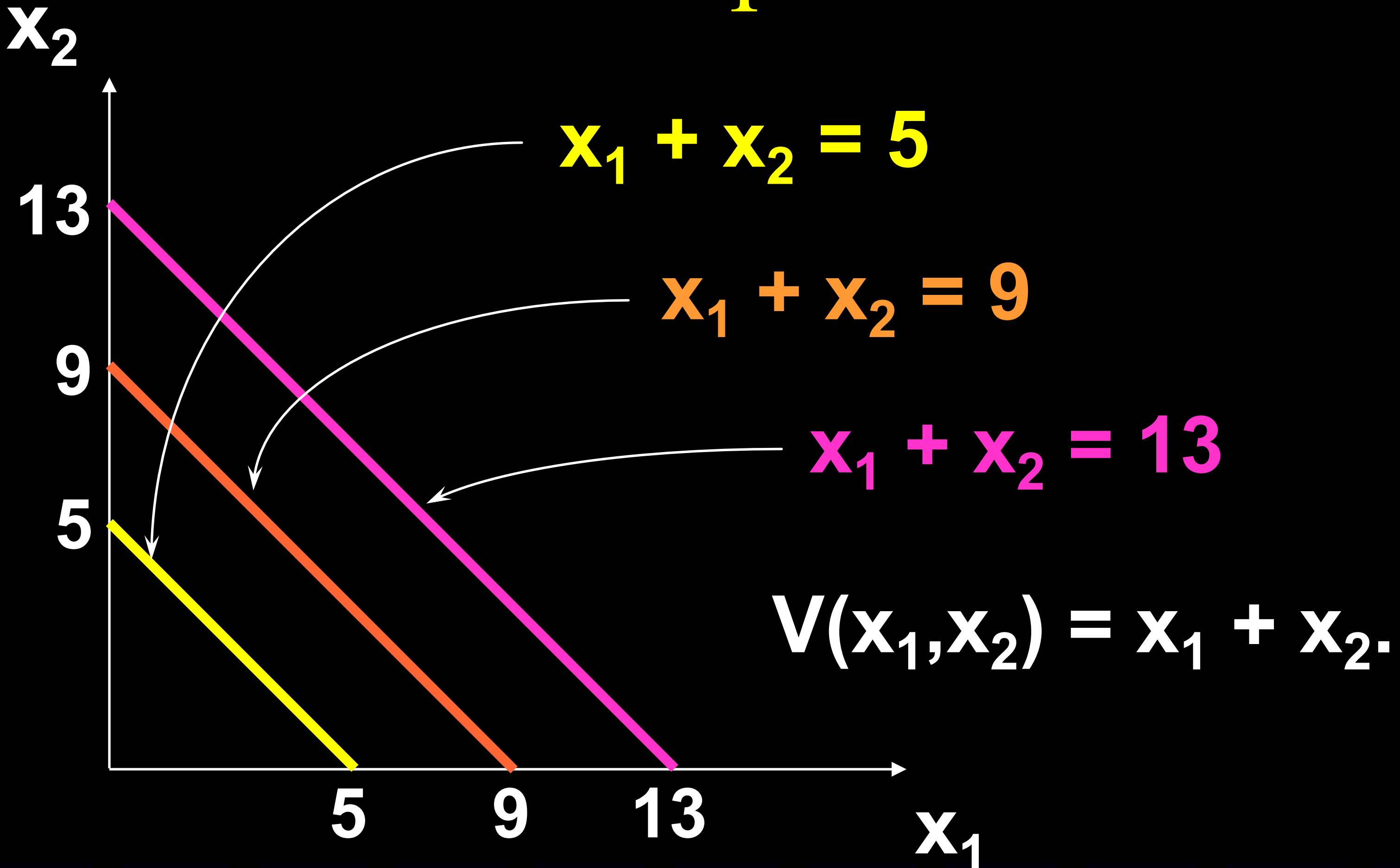
# Algunas otras funciones de utilidad y sus curvas de indiferencia

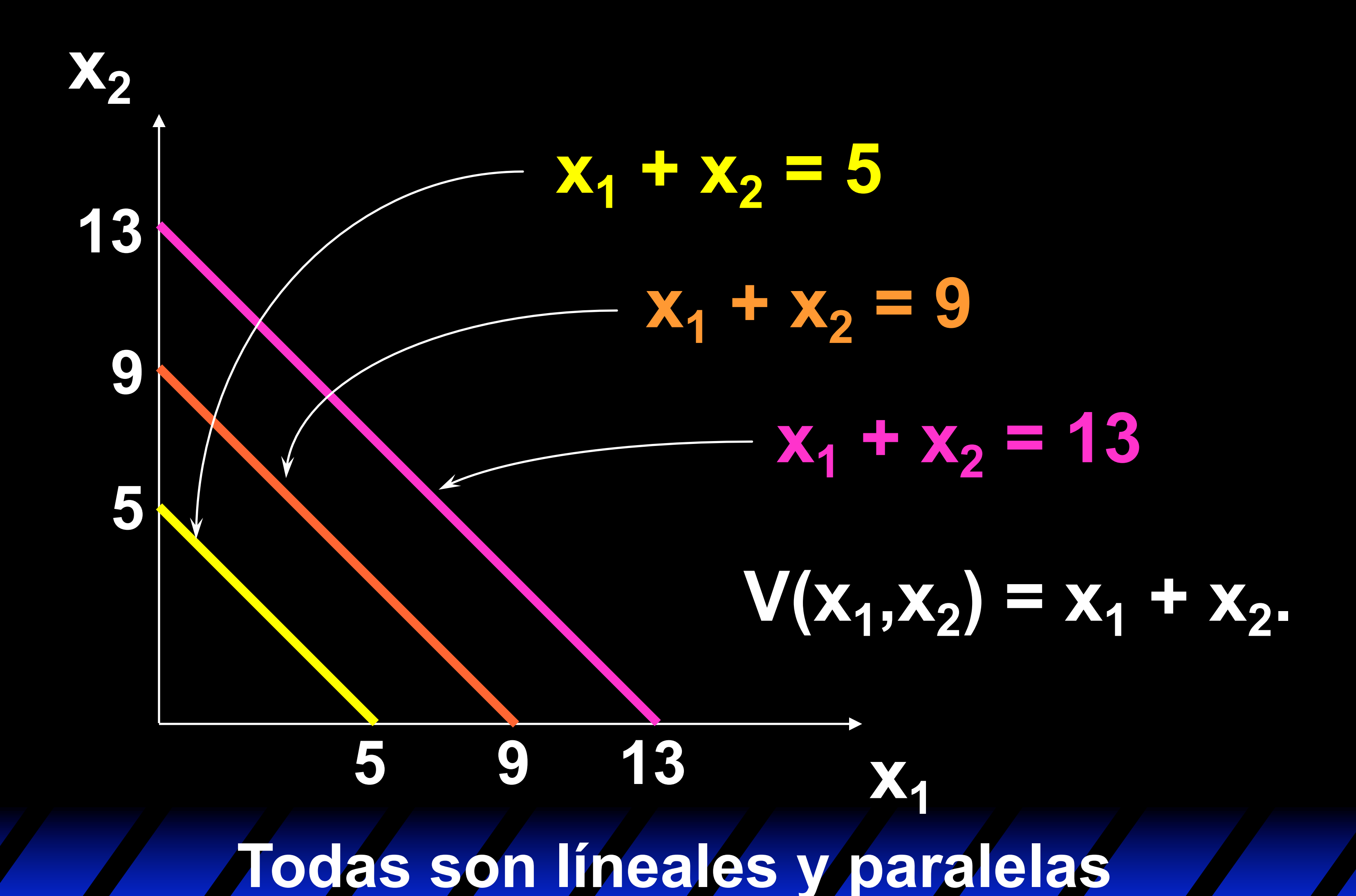
- **En vez de $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ consideremos**

  $$V(x_1,x_2) = x_1 + x_2.$$

  **¿Cómo se presentan las curvas de indiferencia de esta función?**

# Curvas de indiferencia de sustitutos perfectos





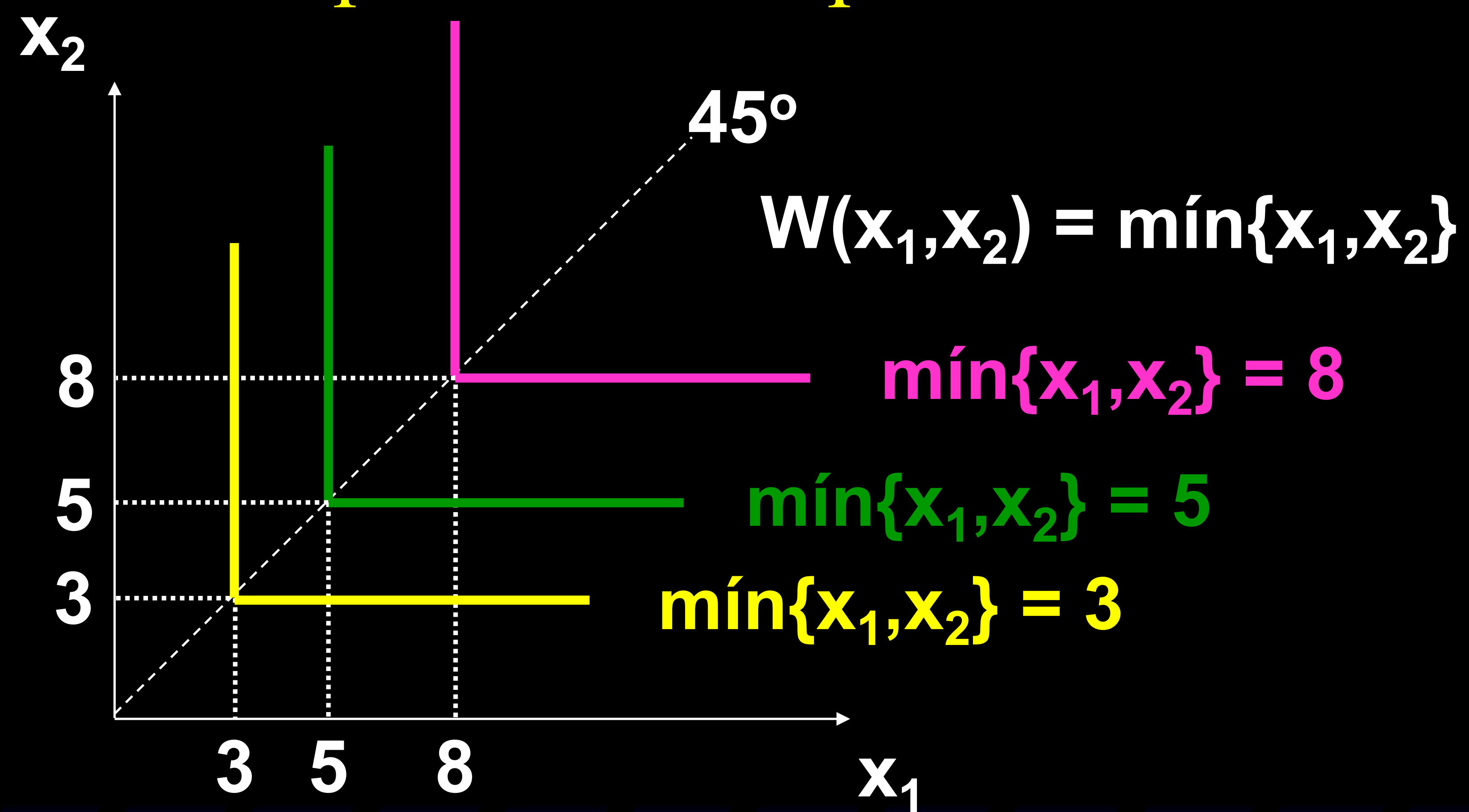

Todas son líneales y paralelas

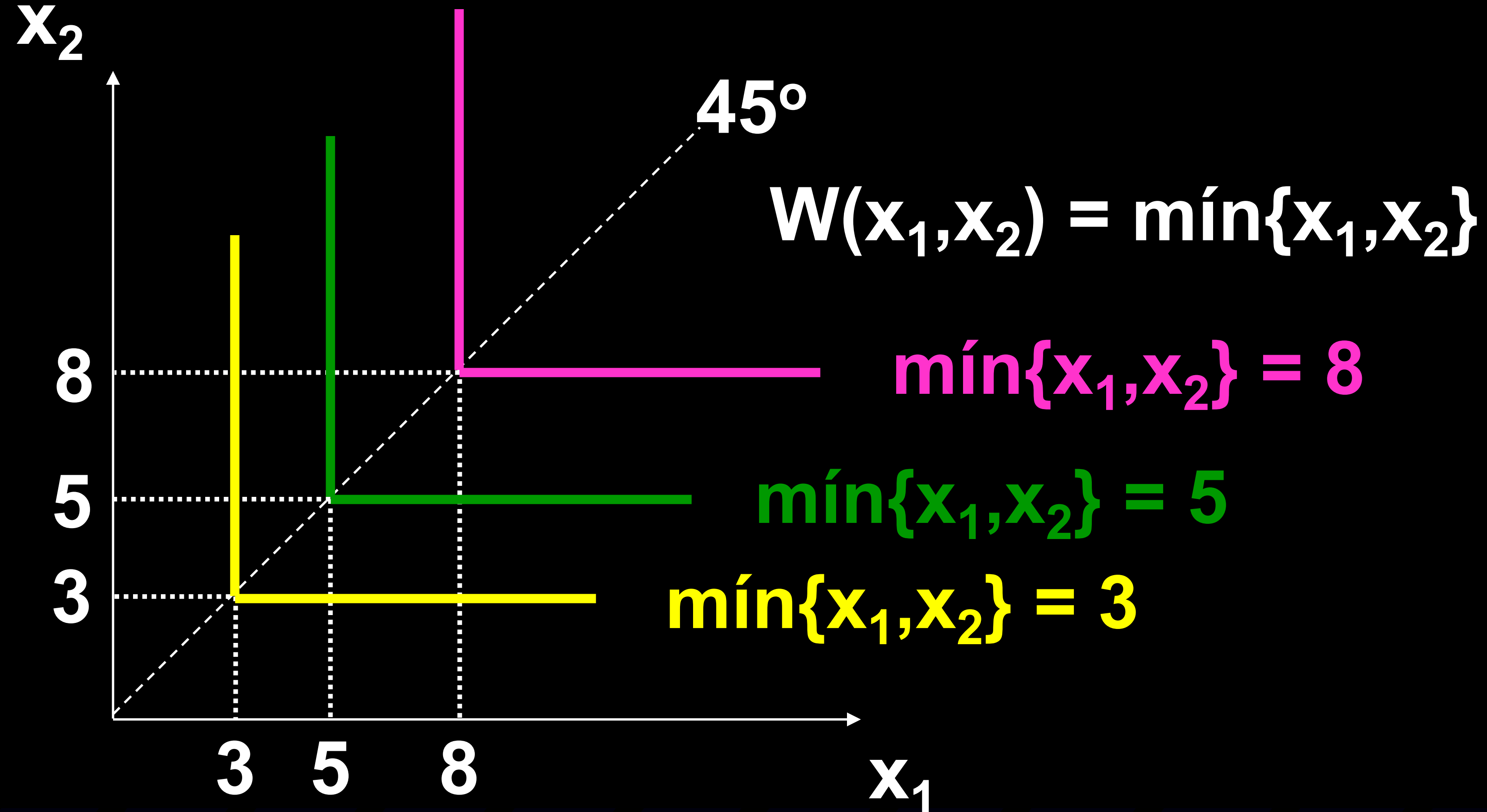
- En vez de $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ ó $V(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, consideremos

$$W(x_1,x_2) = \text{mín}\{x_1,x_2\}.$$

¿Cómo se presentan las curvas de indiferencia de esta función?

# Curvas de indiferencia de complementarios perfectos






Todas son ángulos rectos con vertices en el rayo que parte del orígen.

- **Una función de utilidad de la forma**

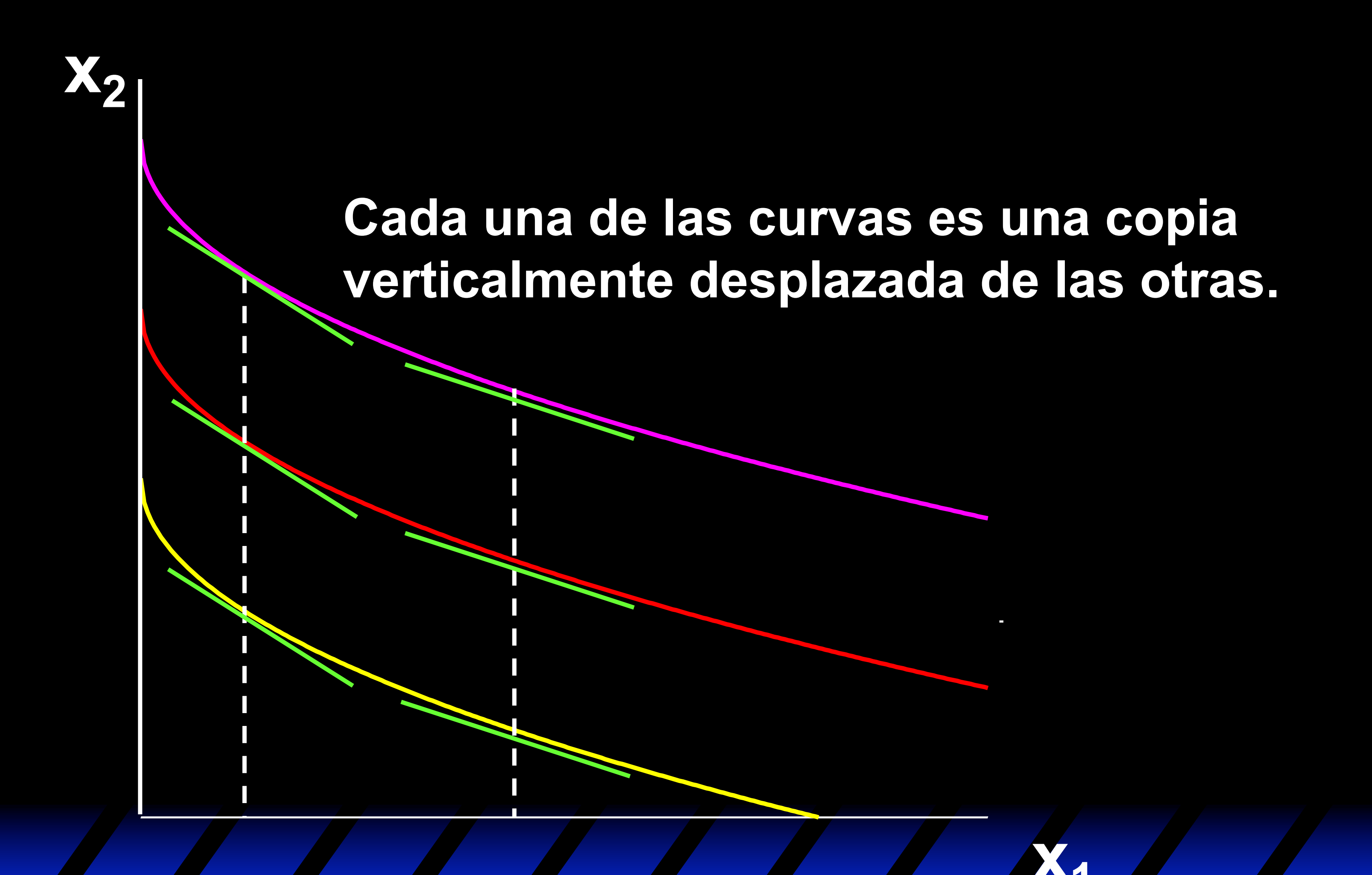
$$U(x_1,x_2) = f(x_1) + x_2$$

**es líneal en $x_2$ y se conoce como cuasi lineal.**

- ***Por ejemplo:***

$$U(x_1,x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2.$$

# Curvas de indiferencia cuasi lineales



- **Cualquier función de utilidad de la forma**

$$U(x_1,x_2) = x_1^a x_2^b$$

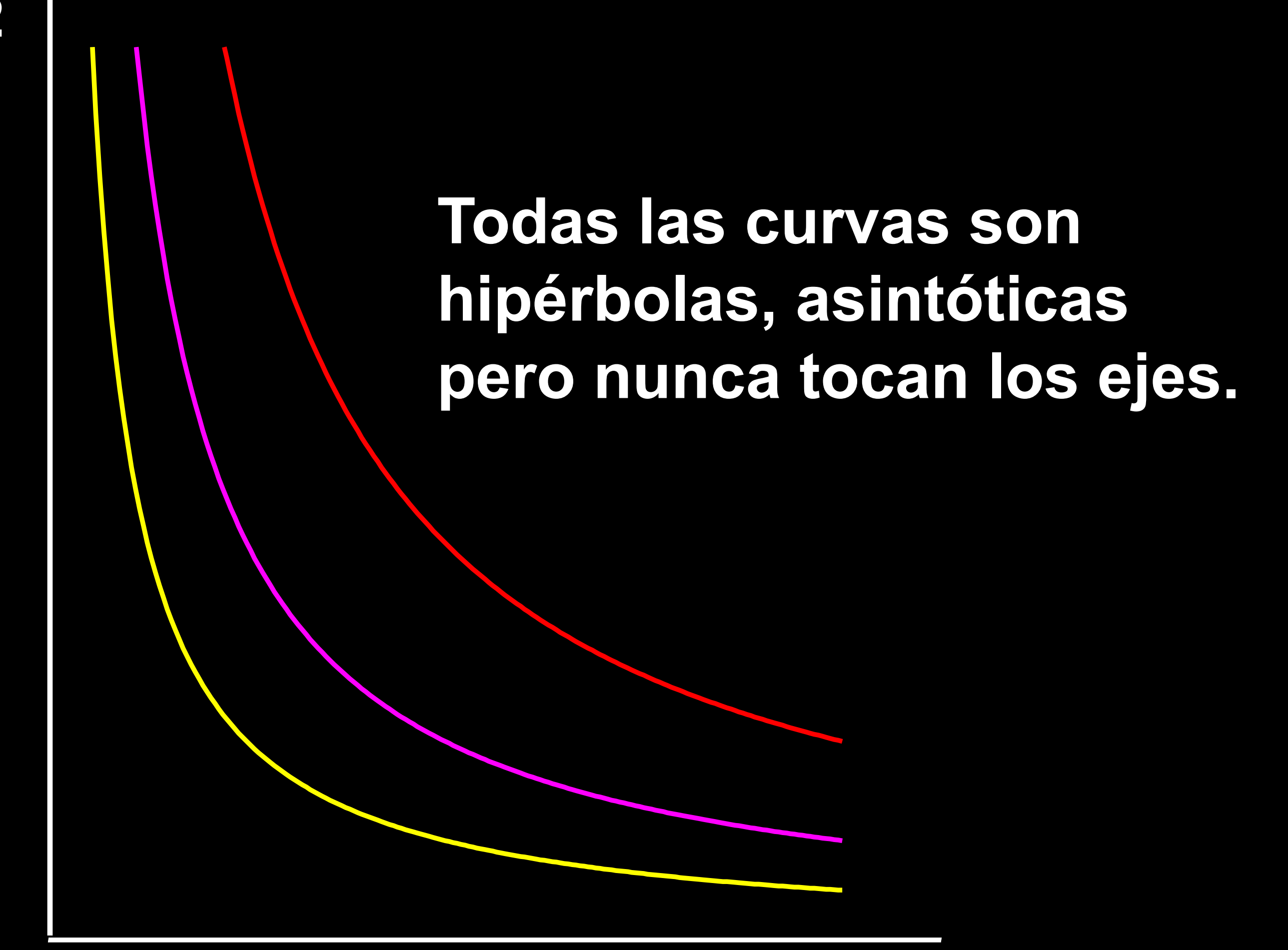
**con a > 0 y b > 0 se conoce como función de utilidad Cobb-Douglas.**

- ***Por ejemplo:***

$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ (a = b = 1/2)

$V(x_1,x_2) = x_1 x_2^3$ (a = 1, b = 3)

# Curvas de indiferencia Cobb-Douglas



# Utilidd Marginal

- Marginal significa “incremental”.
- La utilidad marginal de un bien es la tasa de cambio de la utilidad total cuando la cantidad del bien i cambie. Por ejemplo:

- *Por ejemplo* si $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ entonces

$$UMg_1 = \frac{\partial UT}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2$$

- *Por ejemplo, si* $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ entonces

$$UMg_1 = \frac{\partial UT}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2$$

- *Por ejemplo, si* $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ entonces

$$UMg_2 = \frac{\partial UT}{\partial x_2} = 2x_1^{1/2} x_2$$

- ***Por ejemplo, si*** $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2}\, x_2^2$ **entonces**

$$UMg_2 = \frac{\partial UT}{\partial x_2} = 2x_1^{1/2} x_2$$

- *Así, si* $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ entonces

$$UMg_1 = \frac{\partial UT}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2$$

$$UMg_2 = \frac{\partial UT}{\partial x_2} = 2 x_1^{1/2} x_2$$

# Utilidd Marginal y Tasa Marginal de Sustitución

- **La ecuación general para una curva de indiferencia es**
  **$U(x_1,x_2) \equiv k$, donde k es una constante**
  **La diferencia total de esta identidad es:**

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\frac{\partial UT}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial UT}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

**Reordenando:**

$$\frac{\partial UT}{\partial x_2}dx_2 = -\frac{\partial UT}{\partial x_1}dx_1$$

y

$$\frac{\partial UT}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{\partial UT}{\partial x_1} dx_1$$

reordenando

$$\frac{d x_2}{d x_1} = -\frac{\partial UT / \partial x_1}{\partial UT / \partial x_2}.$$

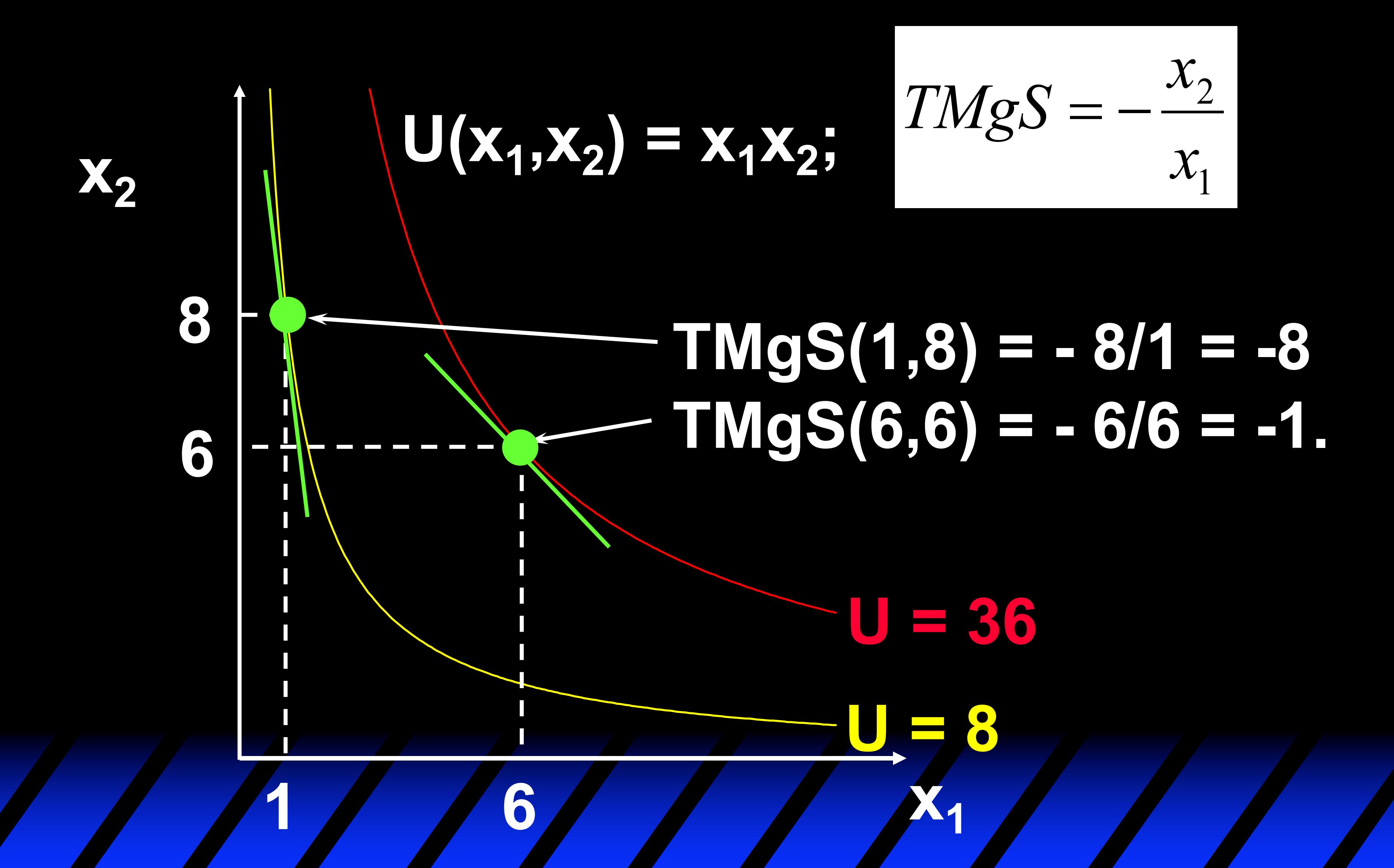
Ésta es la TMgS.

# Utilidad Marginal y Tasa Marginal de Sustitución, un ejemplo.

- $$\frac{\partial UT}{\partial x_1} = (1)(x_2) = x_2$$

  $$\frac{\partial UT}{\partial x_2} = (x_1)(1) = x_1$$

→ $$TMgS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial UT / \partial x_1}{\partial UT / \partial x_2} = -\frac{x_2}{x_1}.$$



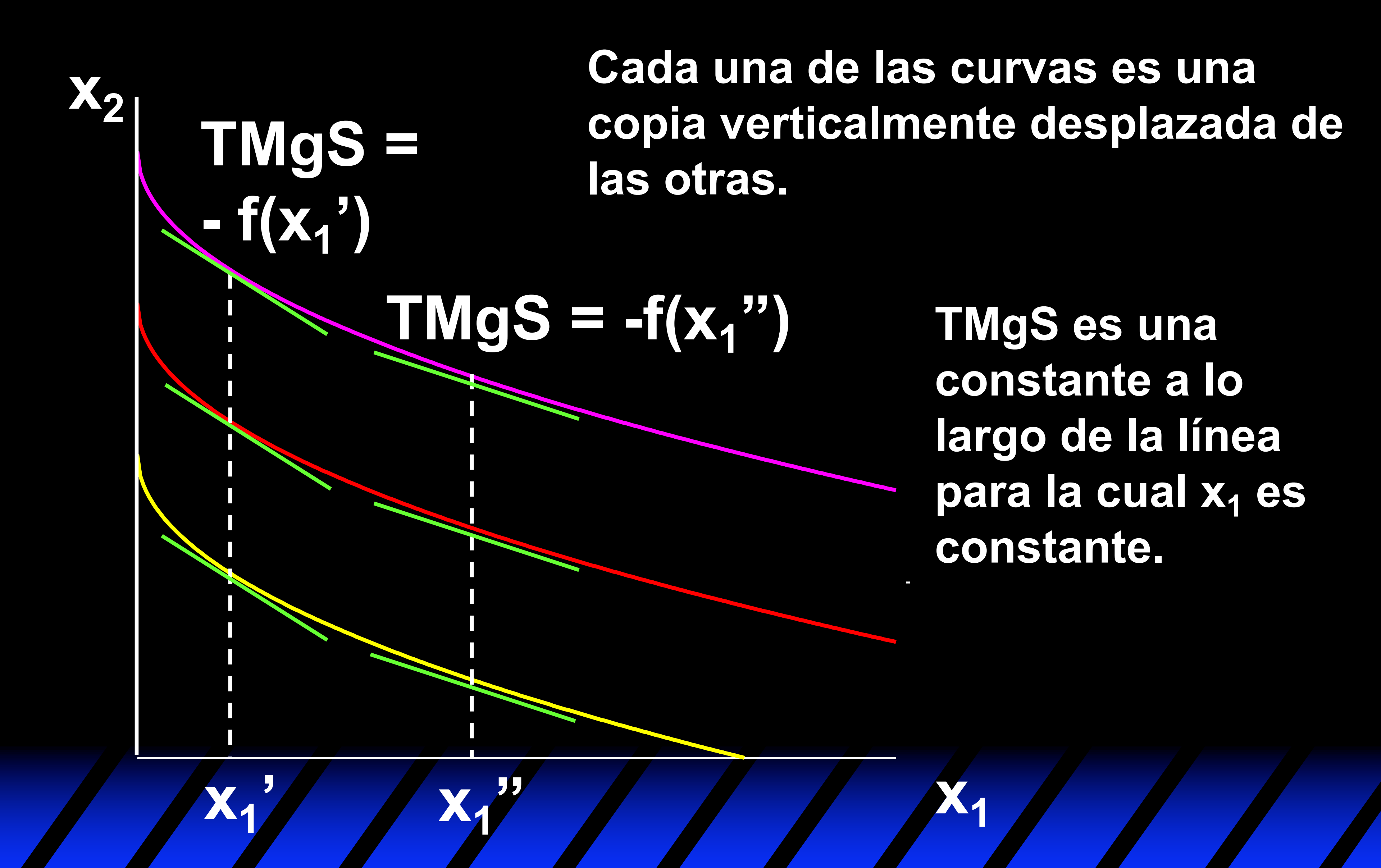
$x_2$
$U(x_1,x_2) = x_1x_2$;
$$TMgS = -\frac{x_2}{x_1}$$
8
6
TMgS(1,8) = - 8/1 = -8
TMgS(6,6) = - 6/6 = -1.
U = 36
U = 8
1
6
$x_1$

# Tasa Marginal de Sustitución para funciones de utilidad cuasi lineales

- $$\frac{\partial UT}{\partial x_1} = f'(x_1) \qquad \frac{\partial UT}{\partial x_2} = 1$$

→ $$TMgS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial UT / \partial x_1}{\partial UT / \partial x_2} = -f'(x_1).$$

- La TMgS $= - f'(x_1)$ no depende de $x_2$ en consecuencia, la pendiente de las curvas de indiferencia para una función de utilidad cuasi lineal es constante a lo largo de cualquier de cualquier líneal para la cual $x_1$ es constante.¿Cómo es el mapa de curvas de indiferencia en este caso?


$x_2$
TMgS =
- $f(x_1')$
Cada una de las curvas es una copia verticalmente desplazada de las otras.
TMgS = $-f(x_1'')$
TMgS es una constante a lo largo de la línea para la cual $x_1$ es constante.
$x_1'$
$x_1''$
$x_1$

# Transformaciones Monotónicas y Tasa Marginal de Sustitución

- **Aplicar una transformación monotónica a una función de utilidad crea otra función de utilidad que representa a la misma relación de preferencias.**
- **¿Pero, qué sucede con la TMgS cuando se aplica una transformación monotónica?**

- Para $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ la TMgS = $- x_2/x_1$.
- Creamos $V = U^2$; $V(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$. ¿Cuál es la TMgS para V?

$$TMgS = -\frac{\partial V / \partial x_1}{\partial V / \partial x_2} = -\frac{2x_1x_2^2}{2x_1^2x_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

que es la misma TMgS para U.

- De manera más general, si V = f(U) donde f es una función estríctamente creciente, entonces

$$TMgS = -\frac{\partial V / \partial x_1}{\partial V / \partial x_2} = -\frac{f'(U) \times \partial U / \partial x_1}{f'(U) \times \partial U / \partial x_2}$$

$$= -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

En consecuencia, la TMgS no cambia por una transformación monotónica Positiva.